

5 $x^2 + xy + y^2 = 7a - 7 \dots \textcircled{1}$ $x^2 - xy + y^2 = a + 11 \dots \textcircled{2}$ とおく

$(\textcircled{1} + \textcircled{2}) \times \frac{1}{2}$ より $x^2 + y^2 = \underline{4a + 2} \dots \textcircled{3}$

$(\textcircled{1} - \textcircled{2}) \times \frac{1}{2}$ より $xy = \underline{3a - 9} \dots \textcircled{4}$

$(x+y)^2 = (x^2 + 2xy + y^2) = 4a + 2 + 2(3a - 9) = \underline{10a - 16} \dots \textcircled{5}$

$(x-y)^2 = (x^2 - 2xy + y^2) = 4a + 2 - 2(3a - 9) = \underline{-2a + 20} \dots \textcircled{6}$

(1) $a = 4$ とおき $\textcircled{5}, \textcircled{6}$ より

$(x+y)^2 = 10 \times 4 - 16 = 24$ $(x-y)^2 = -2 \times 4 + 20 = 12$

$x > y > 0$ より $x+y > 0, x-y > 0$ であるから

$(x+y) = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \dots \textcircled{7}$ $(x-y) = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \dots \textcircled{8}$

$(\textcircled{7} + \textcircled{8}) \times \frac{1}{2}$ より $x = \underline{\sqrt{6} + \sqrt{3}}$ $(\textcircled{7} - \textcircled{8}) \times \frac{1}{2}$ より $y = \underline{\sqrt{6} - \sqrt{3}}$

(2) x, y がともに ^実整数となるのは

$(x+y)^2 \geq 0$ より $(x-y)^2 \geq 0$ であるから

$10a - 16 \geq 0$ より $-2a + 20 \geq 0$

$\therefore a \geq \frac{3}{5}$ より $a \leq 10$

$\therefore \frac{3}{5} \leq a \leq 10$ を満たす整数 a は

$a = \underline{2, 3, 4, \dots, 10}$ とおける。

(3) $x > y > 0$ を満たす整数 x, y が存在する

$xy > 0, (x-y)^2 > 0$ より $\textcircled{4}, \textcircled{6}$ より

$3a - 9 > 0$ より $-2a + 20 > 0$

$\therefore 3 < a < 10$ より a は $4 \sim 9$ の間の整数である。

$\therefore a$ は $\textcircled{6}$ より $-2a + 20$ が平方数となる a の値は

a	4	5	6	7	8	9
$-2a + 20$	12	10	8	6	4	2

より $a = \underline{4}$ とおける。

$\therefore a = 4$

$(x+y)^2 = 64 \rightarrow x+y = 8$

$(x-y)^2 = 4 \rightarrow x-y = 2$

より

$x = 5, y = 3$ とおける。

6 中央の項を a とする。(5項は3項目, $2n+1$ 項は $n+1$ 項目)

連続した5項は公差が -2 だから $a+4, a+2, a, a-2, a-4$.

又連続した $(2n+1)$ 項は

$$a+2n, a+2n-2, \dots, a+2, a, a-2, \dots, a-2n+2, a-2n$$

で表せる。

$$(1) (a+4) + (a+2) + a = (a-2) + (a-4) \\ 3a + 6 = 2a - 6 \quad \therefore \underline{\underline{a = -12}}$$

又,

$$(a+2n) + (a+2n-2) + \dots + (a+2) + a \\ = (a-2) + (a-4) + \dots + (a-2n+2) + (a-2n) \quad \#4$$

$$a = -2(2+4+\dots+2(n-1)+2n) \\ = -4(1+2+\dots+(n-1)+n) \\ = -4 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) = \underline{\underline{-2n^2 - 2n}}$$

左辺は $n+1$ 項あり
右辺は n 項あり

$$(2) (a+4)^2 + (a+2)^2 + a^2 = (a-2)^2 + (a-4)^2 \quad \#4 \\ a^2 + 8a + 16 + a^2 + 4a + 4 + a^2 = a^2 - 4a + 4 + a^2 - 8a + 16 \\ \therefore a^2 + 2a = 0 \\ a(a+2) = 0 \quad a \neq 0 \quad \therefore \underline{\underline{a = -2}}$$

又

$$(a+2n)^2 + (a+2n-2)^2 + \dots + (a+2)^2 + a^2 \\ = (a-2)^2 + (a-4)^2 + \dots + (a-2n+2)^2 + (a-2n)^2$$

$$a^2 + 4\{2 + (2n-2) + 2n\}a = 0 \\ a^2 + 8\{1 + 2 + \dots + (n-1) + n\}a = 0$$

左辺も展開して
右辺は移項して

$$a^2 + 8 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) a = 0$$

$$a^2 + 4n(n+1)a = 0$$

$$a\{a + 4n(n+1)\} = 0$$

$$a \neq 0 \quad \therefore a = -4n(n+1)$$

$$\therefore \underline{\underline{a = -4n^2 - 4n}}$$