

1 次の各問に答えよ。

(1) 2次の正方行列 A, B に対して、 $(A+B)^2$ を展開せよ。(結果のみ)

(2) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を計算せよ。(結果のみ)

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & a \end{pmatrix}$ 、 $B = \begin{pmatrix} 2 & b \\ c & 1 \end{pmatrix}$ のとき、 $AB=O$ となるような定数 a, b, c の値を求めよ。

(4) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 、 $B = \begin{pmatrix} 2 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$ について、 $AB=BA$ が成り立つように x, y の値を求めよ。また、このとき $(A-B)(A^2+AB+B^2)$ を展開し A, B を用いて表せ。

(5) 点 $(1, -1)$ を点 $(3, -2)$ に移し、点 $(1, 2)$ を点 $(0, 7)$ に移すような移動を表す行列を求めよ。

2 行列 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ について、次の各問に答えよ。ただし、 E は2次の単位行列とする。

(1) $A^2 - A - E$ を求め、成分で表せ。

(2) $B = A^3 - 2A^2 + A - 3E$ を $pA + qE$ (p, q は実数) の形で表し、 B を成分で表せ。

3 次の行列 A において、 A^n を求めよ。ただし、 n は自然数とする。また、必要であれば数学的帰納法による証明を行え。

(1) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

4 $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 、 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ のとき、 $B = P^{-1}AP$ とおく。このとき、次の各問に答えよ。

(1) P^{-1} 、 B 、 B^n を求めよ。(結果のみ)

(2) A^n を求めよ。ただし、 n は自然数とする。

5 連立方程式 $\begin{cases} ax+y=a \\ 4x+ay=2a \end{cases}$ を解け。ただし、 a は定数とする。

6 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2 - 7A + 6E = O$ を満たすとき、 $a+d$ 、 $ad-bc$ の値を求めよ。ただし、 E は 2 次の単位行列とする。

7 直線 $l: y = \sqrt{3}x$ に対して次の各問に答えよ。

- (1) 直線 l と x 軸の正の向きとのなす角 θ を求めよ。(結果のみ)
- (2) x 軸に関する対称移動を表す行列を求めよ。(結果のみ)
- (3) 直線 l に関する対称移動を表す行列を求めよ。

8 行列 A 、 B を 2 次の正方行列とし E を 2 次の単位行列とすると、次の各問に答えよ。

- (1) A と B が交換可能で、 B が逆行列をもつとき、 $A = B^{-1}AB$ を示し、 A と B^{-1} は交換可能であることを示せ。
- (2) $A^2 = A$ かつ $A \neq E$ ならば、 A は逆行列をもたないことを証明せよ。

9 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ に対して、次の各問に答えよ。ただし、 E は 2 次の単位行列、 n は自然数とする。

- (1) $A \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ を満たす実数 k の値を求めよ。
- (2) (1) の k の値に対して、 $B = A - kE$ とするとき、 B^n を求めよ。
- (3) A^n を求めよ。