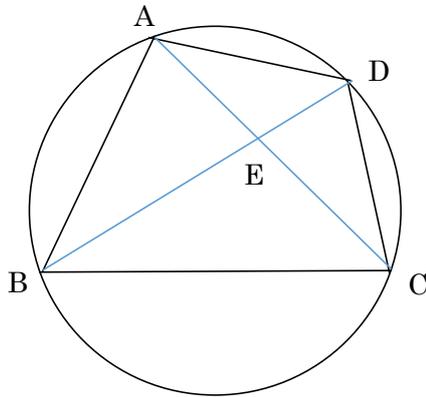


- 4] a, b どちらも奇数と仮定し、自然数 m, n を用いて $a = 2n + 1, b = 2m + 1$ とおく。このとき
 $a^2 + b^2 = (2n + 1)^2 + (2m + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 + 4m^2 + 4m + 1 = 2(2n^2 + 2n + 2m^2 + m + 1)$
 $= 2 \times \text{奇数}$ と表され、これは 2^2 を因数に持たないから、 $a^2 + b^2$ は平方数になれない。
したがって、 a, b の少なくとも一方は偶数である。

- 5] 四角形 ABCD が最大となるのは、 $AD = CD$ すなわち BD が $\angle ABC$ の 2 等分線となるときだから、
 $\triangle ABD$ と $\triangle CBD$ に正弦定理を用いると



$$\frac{AD}{\sin 30^\circ} = 2R = \frac{AC}{\sin 60^\circ}$$

$$R = \frac{\sqrt{13}}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{39}}{3} \text{ となるので, } AD = \frac{\sqrt{39}}{3}$$

また、四角形 ABCD の面積 = $\triangle ABC + \triangle ADC$

$$= 3\sqrt{3} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{39}}{3} \times \frac{\sqrt{39}}{3} \times \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{49\sqrt{3}}{12}$$

(4) $BE:ED = \triangle ABC : \triangle ADC = 3\sqrt{3} : \frac{13\sqrt{3}}{12} = 36:13$

(5) $BK = 5$ より $AK=4$ だから四面体 K-ABC の体積 V は

$\triangle KAB$ は $\angle A$ が直角なので BK は直径となるからその長さは 5 で、 $AB=4$ より $AK=4$ となる。したがって

$$V = \frac{1}{3} \triangle ABC \times AK = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{3} \times 4 = 4\sqrt{3}$$

